Matematika A1 – cvičení

Příklady z lineární algebry 1.

1. Najděte všechna řešení (nebo ukažte, že soustava řešení nemá) - užijte Gaussovu eliminační metodu:

a) $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= -3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ -3x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$; b) $\begin{aligned} 2x - y + z + v &= -3 \\ x + y + 3z - v &= 0 \\ -x + 2y - z + v &= 6 \\ x + y + 2z - 3v &= -2 \end{aligned}$; c) $\begin{aligned} 2x - y + z + v &= 1 \\ y - z &= 0 \\ x + y + 2z + v &= 3 \\ x - 2y - z &= 1 \end{aligned}$.

2. a) Najděte vektor $\vec{v} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, je-li $\vec{u}_1 = (-1,\ 2,\ 1)$, $\vec{u}_2 = (2,\ 0,\ -1)$, $\vec{u}_3 = (3,\ 1,\ 1)$.
   b) Spočítejte $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$, je-li $\vec{u} = (3,\ 2,\ 2)$, $\vec{v} = (2,\ 1,\ -1)$.

3. Vypočítejte :

a) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Vypočítejte následující součiny matic:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in N$.

5. Najděte hodnost matice A a ověřte, že hodnost matice se rovná hodnosti matice transponované, když:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Je dána matice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete hodnost matice A.
b) Co můžete říci na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic

$$(*)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

c) Soustavu $(*)$ vyřešte .

7. a) Ukažte, že matice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

má hodnost 3.

b) Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. a) Vysvětlete, co je regulární , respektive singulární čtvercová matice.
Definujte pojem inverzní matice . Kdy k dané matici existuje matice inverzní?

b) Je dána matice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že matice A je matice regulární a Gauss-Jordanovou metodou určete matici inverzní k matici A .

9. Jsou dány matice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Vypočítejte součin $A\,.\,B$.
(ii) Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji. Dá se použít (i) ?
(iii) Užitím A^{-1} řešte rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a proveďte zkoušku správnosti řešení.

10. Jsou dány matice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji.
b) Užitím inverzní matice řešte maticovou rovnici $A \cdot X = B$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.

11. Existuje reálné číslo a, pro které je singulární matice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & a^2 \\ 1 & 2a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a^3 & 1 \end{pmatrix} ?$$

12. Vypočítejte determinanty :

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 2 \\ 4 & -5 & c & 6 \\ a & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & -a & 2a & a \\ b & -b & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3c & -c & 2c & c \end{vmatrix}.$$

13. Najděte všechna řešení rovnice

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 .$$

14. Bez výpočtu determinantu ukažte, že

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 152 & 263 & 374 & 485 \end{vmatrix} = 0 .$$

15. Buďte dány matice

a) $$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad N = \begin{pmatrix} a & a & -2a \\ -1 & 0 & 2 \\ b & b & -3b \end{pmatrix}$$

b) $$M = \begin{pmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

(i) vypočítejte $\det M$;
(ii) vypočítejte $\det N$;
(iii) vypočítejte $\det(M \cdot N)$.

16. Užitím determinantů určete matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$